

ГИДРОДИНАМИКА ТЕҢДЕУЛЕРІ. ТҰЖЫРЫМДАЛУЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

5 қыркүйек 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – Тұтқыр серпімді сығылмайтын сұйықтықтардың қозғалысын сипаттайтын ньютондық немесе ньютондық емес гидродинамика теңдеулерінің математикалық моделдерін тұжырымдау.

Негізгі сұрақтар:

- 1 Кошидің импульс теңдеулер жүйесі
- 2 Кернеу тензоры. Жылдамдықтың деформация тензоры
- 3 Эйлер теңдеулер жүйесі математикалық моделдеуі
- 4 Навье-Стокс теңдеулер жүйесі математикалық моделдеуі
- 5 Навье-Стокс-Фойгт (Кельвин-Фойгт) теңдеулер жүйесі математикалық моделдеуі
- 6 Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі математикалық моделдеуі



Математиканың ең қарқынды дамып келе жатқан бағыттарының бірі - сұйық механикасының әр алуан есептерін математикалық талдау. Қазіргі кезде математика, физика, механика, биология және мұнай-газ өнеркәсібі, медицина, су ресурстары және тағы да басқа ғылым мен техниканың салаларының дамуы көптеген ньютондық және ньютондық емес сұйық механикасы процестерін қатаң жан-жақты математикалық зерттеуді және идеялық тұрғыдан дамытуды талап етуде. Себебі аталған салаларда көптеген объектілер осындай қасиеттерге ие. Сұйық механикасы туралы ең алғашқы ғылыми трактаттар біздің заманымызға дейінгі 250 жылдары ежелгі Грекияда пайда болды. Архимед (287-212 б.з.д.) өзінің екі бөлімнен тұратын "Жүзетін денелер туралы" атты шығармасында сұйықта жүзетін дененің тепе-теңдігі сұрақтарын қарастырған еді. Сұйық қозғалысы туралы "гидродинамика" ғылымының пайда болуы, сұйық пен газ ағынының қозғалысын өзіндік тәжірибелер арқылы зерттеген Л. Да Винчи (1452-1519), С. Стеван (1548-1620), Г. Галилей (1564-1642), Б. Паскаль (1588-1651), Э. Торричелли (1608-1647), И. Ньютон (1643-1727) және тағы басқа да ғалымдардың есімімен тікелей байланысты. Мәселен, 1643 жылы Э. Торричелли саңылаудан ағып жатқан сұйықтың жылдамдығы саңылау үстіндегі биіктікке тура пропорционалдығы туралы формуласын қорықтан еді. Ал, 1653 жылы Б. Паскаль тек сұйық пен газдардың қозғалысы барысында қысымның тұрақты болуы туралы заңды тұжырымдады.



И. Ньютон жанама кернеу мен жылдамдық градиентінің сызықты тәуелдігі жөнінде заңын ашты. Алайда, сұйық механикасының ғылыми негізін XVIII ғасырдың ғалымдары Д. Бернулли (1700-1783), Л. Эйлер (1707-1783), Ж.Л. Даламбер (1717-1783) қалаған еді. Д. Бернуллидің көпжылдық ғылыми ізденістерінің нәтижесінде 1738 жылы жарық көрген "Гидродинамика" атты монографиясында энергияның сақталу заңының салдары ретінде сығылмайтын сұйықтың стационарлық ағысының теңдеуін жария етті. Ал Л. Эйлер 1757 жылы Д. Бернуллидің нәтижесін сығылатын сұйық (газдар) үшін қорытындылап, сонымен қатар, идеал сұйықтың қозғалыс теңдеуін тұжырымдаған еді. Одан кейін оның жұмысын Ж.Л. Лагранж (1736-1813) жалғастырды. Ж.Л. Даламбер сұйықтың тепе-теңдігі мен қозғалысы туралы өзінің трактаттарын жазды. А. Навье (1785-1836) молекулалардың өзара әсерлесуі гипотезасының көмегімен тұтқыр сұйықтың қолғалысының теңдеуін тұжырымдады. Д. Стокс (1819-1903) аксиоматикалық негізде тұтқыр сұйықтың қозғалыс теңдеуін қорытып шығарды. О. Рейнольдс (1842-1912) тұтқыр сұйықтың қозғалысын зерттей отырып, оның ламинарлы және турбулентті ағысы түсінігін енгізді, сонымен қатар, ламинарлы ағыс түрінен турбулентті ағыс түріне және керісінше қалай жылдам өтуге болатынын көрсетті. Л. Больцман (1844-1906) газ немесе сұйық бөлшектерінің статистикалық үлестірімін сипаттайтын заңы арқылы гидродинамика теңдеулерінің кинетикалық негіздемесін жасады.



Теңдеудің тұжырымдалуы

Сұйықтықтың физикалық ерекшелігін сипаттау үшін кеңістіктік пен уақыттық айнымалыларға тәуелді сұйықтың жылдамдығы мен қысымы қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулер жүйесін алды.

Шенелген $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ облыста біртекті емес сығылмайтын сұйықтың $[0, T]$, $T > 0$ уақыт аралығында қозғалысы келесі Коши теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \mathbf{div} \sigma + \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (3)$$

мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_d(\mathbf{x}, t))$ — сұйықтың жылдамдық векторы, $p(\mathbf{x}, t)$ — сұйықтың қысымы, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), \dots, f_d(\mathbf{x}, t))$ — сұйыққа әсер етуші сыртқы күштердің тығыздығы, $\rho(\mathbf{x}, t)$ — сұйықтың тығыздығы, σ — кернеу тензорының девиаторы және $\text{tr } \sigma = 0$. Ал, $\mathbf{div} \sigma$ векторы - ∇ (набл) векторы мен кернеу тензорының девиаторы арасындағы скаляр көбейтінді, оның компоненттері

$$\left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{dj}}{\partial x_j} \right).$$



Кернеу тензорының девиаторын (1)-(3) теңдеулер жүйесінің белгісіздері арқылы өрнектеу үшін кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас қолданылады. Деформация тензорын ε арқылы белгілейді, ал оның компоненттері келесі өрнекпен анықталады

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^d, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Мұндай кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас *реологиялық* қатынас деп аталады.

Егер кернеу тензорының девиаторы $\sigma \equiv 0$ болса, онда идеал сығылмайтын сұйықтың қозғалысын сипаттайтын Эйлер теңдеулер жүйесі тұжырымдалады

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (4)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (5)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (6)$$



Алайда, соңғы бір жарым ғасырдан астам уақытта гидродинамика саласында негізінен ньютондық сұйықтың қозғалысы зерттелініп келеді. Ньютондық сұйықтың қозғалысының реологиялық қатынасы

$$\sigma = 2\nu\varepsilon \quad (7)$$

өрнегімен анықталады, мұндағы ν — тұтқырлықтың кинематикалық коэффициенті. Кернеу тензорының девиаторы (7) өрнек бойынша мәнін (1)-(3) теңдеулер жүйесіне қойғанда

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \mathbf{grad} p = \nu\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (8)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (9)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (10)$$

Навье-Стокс теңдеулер жүйесі қорытылады. Бірақ, 1971 жылы Павловский жұмысында [1] әлсіз концентрлі су-полимерлі қоспаларының моделі үшін кернеу тензорының девиаторын (7) өрнектің орнына келесі түрде анықтады

$$\sigma = 2\nu\varepsilon + 2\kappa \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \quad \nu > 0, \kappa > 0, \quad (11)$$

мұндағы κ —ретардация уақыты немесе деформацияның релаксация уақыты.



Павловский В.А.

К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров. Докл. АН СССР. –1971. –№.200(4). –С.809–812.



Кернеу тензорының девиаторы (11) өрнек бойынша мәнін (1)-(3) теңдеулер жүйесіне қойғанда

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \nu \Delta \mathbf{u} + \kappa \Delta \mathbf{u}_t + \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (12)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (13)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (14)$$

тұтқыр сығылмайтын біртекті емес сұйықтың релаксациялық қасиеттерін сипаттайтын Кельвин-Фойгт (Навье-Стокс-Фойгт) теңдеулер жүйесі тұжырымдалады. Ең алғаш мұндай теңдеулер жүйесі туралы туралы 1966 жылы Мәскеуде өткен математиктердің халықаралық конгрессінде О.А. Ладыженская баяндамасында [1] айтылып, Навье-Стокс жүйесінің регуляризациясы ретінде ұсынылды.



Ладыженская О.А.

О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред// *Международный конгресс математиков. Тезисы докладов.* — 1966. — С. 560-573. Москва.



Сөйтіп, Кельвин-Фойгт сұйығының математикалық моделін негізге ала отырып, релаксация уақыты дискретті үлестірілген және кешігу уақытынан тұратын *сызықты тұтқыр серпімді сұйықтың* феноменологиялық теориясы қалыптасты. Осындай қасиеттерге ие L —ретті Кельвин-Фойгт сұйықтығының реологиялық қатынасы келесі өрнекпен анықталады

$$\left(1 + \sum_{k=1}^L \lambda_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \sigma = 2 \left(\nu + \sum_{k=1}^{L+1} \varkappa_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \varepsilon, \quad \lambda_L, \mu_{L+1} > 0, \quad L = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

мұндағы λ_k —релаксация уақыты, $\varkappa_k$ —кешігу уақыты.

Енді соңғы өрнектен σ кернеу тензорының девиаторын өрнектеу үшін оған және ε деформация тензорына, сондай-ақ, олардың уақыт бойынша туындыларына бастапқы шарттар қажет. Ол бастапқы шарттар келесі өрнекпен анықталады

$$\left. \frac{\partial^k \varepsilon}{\partial t^k} \right|_{t=0} = g_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, L; \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial^k \sigma}{\partial t^k} \right|_{t=0} = h_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (17)$$

Егер $L = 1$ жағдайда (15) өрнекке t айнымалысы бойынша Лаплас түрлендіруін қолданып және (16), (17) бастапқы шарттарда $g_k = 0, h_k = 0$ деп ұйғарсақ, онда кернеу тензорының девиаторы

$$\sigma = 2\varkappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 2\nu \varepsilon + 2\beta \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \varepsilon d\tau, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (18)$$

өрнегімен тұжырымдалады. Егер (18) өрнекте $\beta = 1$, $\alpha = 1$ және e^{-t} функциясының орнына жалпы түрде $K(t)$ функциясын қарастырып, шыққан нәтижені (1)-(3) Коши теңдеулер жүйесіне қойғанда, сәйкесінше, келесі теңдеулер жүйесі алынады

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \nu \Delta \mathbf{u} + \kappa \Delta \mathbf{u}_t + \int_0^t K(t - \tau) \Delta \mathbf{u} d\tau + \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (19)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (20)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (21)$$

Бұл (19)-(21) теңдеулер жүйесі жоғарыда атап өткендей біртекті емес ньютондық емес сұйықтың ағынын сипаттайды. Егер қарастырылып отырған сұйық біртекті, яғни тұрақты тығыздықты ($\rho = \text{const}$) болса, онда мұндай сұйықтың қозғалысы $\rho = 1$ дербес жағдайда

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{grad } p = \nu \Delta \mathbf{u} + \kappa \Delta \mathbf{u}_t + \int_0^t K(t - \tau) \Delta \mathbf{u} d\tau + \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (22)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (23)$$

теңдеулер жүйесімен тұжырымдалады.



Соңғы (22)-(23) теңдеулер жүйесін интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі деп атайды. Алайда, Звягин мен Турбин [1] атап өткендей, Кельвин де, Фойгт те кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры арасындағы реологиялық қатынасты немесе тұтқыр серпімді сұйық үшін конститутивтік теңдеулер жүйесін ұсынбаған. "Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі" деген атауды ғылымға енгізген және оны зерттеумен қарқынды түрде айналысқан, О.А. Ладыженская ғылыми мектебінің өкілі әрі шәкірті А.П. Осколков еді. Сонымен қатар, (22)-(23) теңдеулер жүйесін ең алғаш зерттеп бастаған А.П. Осколков [2] болғандықтан, кейбір ғалымдардың ғылыми еңбектерінде "Осколков теңдеулер жүйесі" деген атау да кездеседі.



V.G. Zvyagin, M.V. Turbin

The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids, J. Math. Sci. 168 (2010) 157–308.



Oskolkov AP.

Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids and Oldroyd fluids. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 179 (1989) 137-182.



Математиканың сұйық механикасы саласындағы есептерді екі түрге бөлуге болады: тура және кері есептер. Тура есептер әдетте сыртқы күштер, физикалық коэффициенттер және басқа да параметрлер сияқты кейбір деректер берілген табиғи немесе өндірістік процестерді модельдеу мәселелері ретінде түсінуге болады. Кері есептер кез келген қолданбалы тура есептер секілді өмірдегі практикалық қолданыстар мен қажеттіліктерден туындайды [1, 2, 3]. Мәселен, кері есептер физикалық құбылыстарды модельдеумен қатар, физикалық процестің белгісіз параметрін қалпына келтіру қажеттілігінен туындайды. Олар математикадағы ең маңызды іргелі есептердің бірі болып табылады, өйткені ол тікелей бақылауға қолжетімсіз, есептеу мүмкін емес белгісіз параметрлер туралы мәліметтер береді.



A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin.

Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 2000.



Kabanikhin S.I.

Inverse and Ill-Posed Problems. De Gruyter, Berlin, 2011.



Ramm A.G.

Inverse problems, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, New York, 2005.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

